

Soluzioni: un aiuto a Sally



ITALO

Stiamo alla consegna: tutte le monete da 10 sono convertite in monete da 25 e tutte quelle da 25 sono convertite in monete da 10.

Dialogo con Sally, che ci porta alla soluzione.

D.: Sally, secondo te, all'inizio, sono di più le monete da 10 ¢ o le monete da 25 ¢?

R. di Sally [che è comunque una ragazzina sveglia]: Quelle da 10 ¢, perché dopo averle convertite tutte alla fine ci guadagno. Se 1 moneta da 10 diventa da 25 guadagno 15 ¢, se una moneta da 25 diventa da 10 perdo 15 ¢. Se all'inizio avessi 10 monete 10 ¢ e 10 monete da 25 ¢, non guadagnerei nulla nel cambio. Se alla fine, dopo averle convertite tutte, ho il guadagno di 90 ¢, significa che ho da convertire più monete da 10 ¢ in 25 che non monete da 25 ¢ in 10.

D.: E dunque che cosa proponi?

R.: Comincio a convertirle, a coppie, 1 moneta da 10 ¢ in 25 ¢ contro 1 moneta da 25 ¢ in 10 ¢; finché ho monete da 10 ¢ da convertire in monete da 25 ¢ e altrettante da 25 da convertire in monete da 10, non c'è alcun guadagno.

D.: Finche arriviamo a....?

R.: ... dopo un certo numero di cambi, avrò esaurito le monete da 25 ¢ che avevo all'inizio (e che erano di meno).

D.: ... quindi ora dobbiamo convertire solo le monete da 10 ¢ che rimangono?

R.: Esatto [è Sally che porta alla soluzione]: per ogni moneta da 10 che converto ora guadagno 15 ¢. Per arrivare al guadagno finale di 90 ¢ ne dovrò convertire 6. Le monete da 10 ¢ erano quindi inizialmente 6 di più di quelle da 25 ¢.

D.: mentre quelle che abbiamo convertito prima 1 contro 1?

R.: ... saranno in totale 14 (20-6) e in numero uguale quelle da 10 ¢ e quelle da 20 ¢, dunque 7 e 7. In conclusione, avrò all'inizio 7 monete da 25 ¢ e (7+6) 13 monete da 10 ¢.

D.: Bene, Sally, risposta corretta.

Ti propongo anche un modo leggermente diverso di vedere il problema. Supponiamo di avere 20 monete uguali, a 2 facce. Su una faccia hanno impressa la scritta 10¢, sull'altra la scritta 25¢. Disposte sul tavolo, alcune mostrano la faccia con 10¢, altre la faccia con 25¢.

Quante ne vediamo con la faccia da 10¢ e quante con la faccia da 25¢? Non possiamo rispondere. Ci occorre un'altra informazione: sappiamo che se le rivoltiamo 1 volta, tutte e 20, la somma totale dei valori mostrati aumenta di 90¢.

Cominciamo a rivoltarle, ma procedendo in questo modo: le giriamo a 2 per volta, 1 da 10¢ ed 1 da 25¢; il valore totale non cambia, finché... e qui proseguiamo con la soluzione già trovata.

SILVANO

Per incominciare, vediamo un modo che Sally potrebbe - forse - apprezzare.

■ Ad ogni cambio di una moneta da 10 corrisponde un guadagno di 15 cent; viceversa c'è una perdita di 15 cent per ogni cambio di una moneta da 25. Dato che, cambiando il valore delle monete, si ottiene un importo totale più alto (90 cent in più), inizialmente devono esserci più monete da 10 che da 25.

Sono quindi le monete da 10 in più che determinano il guadagno e, poiché l'incremento è di 90 cent, devono esserci inizialmente 6 monete da 10 cent in più di quelle da 25: infatti, ciascuna porta a un guadagno di 15 cent e $6 \times 15 \text{ cent} = 90 \text{ cent}$.

Le monete sono, in totale, 20. Rispetto alla situazione nella quale fossero in pari numero (10 monete da 25 cent e altrettante da 10 cent), per avere una differenza di 6 bisognerebbe aumentare di 3 le monete da 10 e diminuire di 3 quelle da 25. Otteniamo, così, il risultato: 13 monete da 10 cent e 7 monete da 25 cent.

In alternativa, si può ragionare in questo modo: togliendo dalle 20 monete totali (presenti all'inizio) le 6 da 10 cent che eccedono le altre, restano 14 monete e devono risultare in pari numero quelle da 10 e quelle da 25. Perciò le monete da 25 cent devono essere 7 (e 13, cioè $7 + 6$, quelle da 10 cent).

Adesso in modo un po' più formale.

■ Sia x il numero delle monete da 10 cent e y il numero di quelle da 25. Una prima relazione è:

$$x + y = 20. \quad (1)$$

Poiché, con il cambio, si ha un aumento di 15 cent per ogni moneta da 10 e una diminuzione di 15 cent per ogni moneta da 25, avremo anche:

$$x \cdot 15 \text{ cent} - y \cdot 15 \text{ cent} = 90 \text{ cent} \quad (2)$$

ovvero:

$$x - y = 6. \quad (3)$$

Sommando la (1) e la (3) si ottiene $2x = 26$, da cui $x = 13$. Sostituendo questo valore nella (1), si ottiene, infine, $y = 7$.

Ancora: un modo un po' meno diretto e sempre formale.

■ Sia x il numero delle monete da 10 cent e y il numero di quelle da 25. Una prima relazione è:

$$x + y = 20. \quad (1)$$

Sia, inoltre, z , l'importo totale iniziale delle monete. Perciò, inizialmente:

$$x \cdot 10 \text{ cent} + y \cdot 25 \text{ cent} = z \quad (4)$$

e, dopo il cambio:

$$x \cdot 25 \text{ cent} + y \cdot 10 \text{ cent} = z + 90 \text{ cent.} \quad (5)$$

Sottraendo la (4) dalla (5) si ha:

$$x \cdot 15 \text{ cent} - y \cdot 15 \text{ cent} = 90 \text{ cent}$$

che è la stessa relazione (2) trovata sopra. Da qui si può continuare come al punto precedente.

Da ultimo, per tentativi.

■ Come visto in precedenza, devono esserci – inizialmente – più monete da 10 cent che da 25 cent. Dovremmo, dunque esaminare i casi:

10 cent	25 cent
11	9
12	8
13	7
14	6
...	...
19	1

Perciò calcoliamo:

monete da 10 cent	monete da 25 cent	tot. prima (cent)	tot. dopo (cent)	differenza (cent)
11	9	335	365	30
12	8	320	380	60
13	7	305	395	90

Come si vede, il terzo tentativo dà già il risultato atteso.