Quiz: Il mercato del pesce

di Silvano

RISPOSTE

Indichiamo con:

P: costo odierno di un pesce grosso

p: costo odierno di un pesce piccolo

P': costo di un pesce grosso ieri

p': costo di un pesce piccolo ieri

Le due condizioni descritte si traducono in:

$$\begin{cases} 3P + p = 5P' \\ 3P' + p' = 2P + p \end{cases} \tag{1}$$

e la relazione che dobbiamo controllare è:

$$P + 2p > 5p' \tag{2}$$

▪ Il modo più veloce e diretto per rispondere al primo quesito è questo: la relazione (2) che dobbiamo verificare non contiene il termine P' – cerchiamo allora di eliminare P' dalle due equazioni (1) scritte sopra.

Per farlo, cominciamo col riscrivere a termini invertiti la seconda equazione:

$$\begin{cases} 3P + p = 5P' \\ 2P + p = 3P' + p' \end{cases}$$

Ora moltiplichiamo la prima equazione per 3 e l'ultima per 5, poi sottraiamo membro a membro la prima dall'ultima; otteniamo così:

$$P + 2p = 5p' \tag{3}$$

In altre parole, oggi un pesce grosso e due piccoli costano esattamente come ieri cinque pesci piccoli, non di più. Ha ragione Nadia!

▫ Un piccolo approfondimento: la frase «con quello che ieri ti bastava per comperare tre pesci grossi e uno piccolo oggi compri soltanto due pesci grossi più uno piccolo» potrebbe essere intesa come un vincolo meno stretto di quello che abbiamo ipotizzato. In altre parole: oggi compri soltanto due pesci grossi e uno piccolo – non di più, ma potrebbe rimanerti una piccola somma r (con $0 < r < p$). In questa ipotesi, la seconda delle (1) dovrebbe essere sostituita da:

$$3P' + p' = 2P + p + r$$

e la relazione (3) diverrebbe:

$$P + 2p = 5(p' - r) < 5p'. \tag{3'}$$

Pertanto, a maggior ragione, Nadia sarebbe nel vero.

(D'ora in avanti, però, supporremo sempre che sia $r = 0$).

▪ Altra procedura: ricaviamo un'espressione del primo termine della disuguaglianza (2) dalla prima delle due condizioni (1), sommando p ad ambo i membri:

$$(P + 2P) + p + p = 5P' + p$$

$$P + 2p = 5P' + p - 2P \tag{4}$$

Analogamente, ricaviamo il secondo termine della disuguaglianza (2) dalla seconda condizione del sistema (1), dopo averla moltiplicata per 5:

$$15P' + 5p' = 10P + 5p$$

$$5p' = 10P + 5p - 15P' \tag{5}$$

Perché sia $P + 2p > 5p'$ occorre, dunque che sia:

$$5P' + p - 2P > 10P + 5p - 15P'$$

$$20P' > 12P + 4p$$
$$5P' > 3P + p \tag{6}$$

Ma la prima delle due relazioni (1) ci dice che, invece, è $5P' = 3P + p$. Dunque ha ragione Nadia!

▪ Vi è ancora un altro modo per trovare la risposta al primo quesito. Indichiamo con x il valore del rapporto P/p, ovvero supponiamo che sia $P = xp$ (con $x > 1$).

Sostituendo nella prima delle equazioni (1), con un paio di passaggi otteniamo:

$$P' = \frac{3x + 1}{5} p \tag{7}$$

Poi, sostituendo nella seconda equazione l'espressione di P' ora trovata, unitamente all'espressione di P scritta prima ($P = xp$), con un altro paio di passaggi ricaviamo:

$$p' = \left[2x + 1 - \frac{3}{5}(3x + 1)\right] p \tag{8}$$

A questo punto, sostituendo nella disuguaglianza (2) le espressioni di P e di p' in funzione di p e di x, otteniamo:

$$xp + 2p > 5 \cdot \left[2x + 1 - \frac{3}{5}(3x + 1)\right] p$$
$$x + 2 > 10x + 5 - 9x - 3$$
$$2 > 2$$

Questo ovviamente è falso: quindi, ancora una volta dobbiamo dar ragione a Nadia.

▪ ▪ Per rispondere alla seconda domanda, dividiamo membro a membro la prima delle due relazioni (1) e la (3):

$$\frac{3P + p}{P + 2p} = \frac{P'}{p'}.$$

Dividiamo ora per p numeratore e denominatore del primo membro:

$$\frac{3\,P/p + 1}{P/p + 2} = \frac{P'}{p'}.$$

Se poniamo $x = P/p$ e $x' = P'/p'$, otteniamo la forma più semplice:

$$\frac{3x + 1}{x + 2} = x'$$

e la condizione che il rapporto di prezzo non sia cambiato è data da $x = x'$.

Risolviamo allora l'equazione: $3x + 1 = x(x + 2)$, ovvero $x^2 - x - 1 = 0$. Questa ha come radice positiva il valore:

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618$$

che è, dunque, il rapporto cercato.

▪ ▪ Si può osservare che quello trovato coincide con il cosiddetto *rapporto aureo* φ, ovvero il rapporto tra due quantità a e b (con $a > b$) per le quali:

$$\varphi = \frac{a}{b} = \frac{a + b}{a}$$

(a è medio proporzionale tra $a+b$ e b). Altri nomi? *Sezione aurea*, *costante di Fidia* o *divina proportione* – quest'ultima come nell'omonimo famoso trattato di Luca Pacioli (del 1497, stampato nel 1509).

Possiamo dire che il rapporto tra i due prezzi dovrebbe essere molto *equilibrato* e *armonioso*? Sì, ma purtroppo, dato che φ è un numero irrazionale, non lo si può ottenere come rapporto tra due prezzi (che sono sempre dati da valori razionali)! Ci si può soltanto andare molto vicino…

▫ Una curiosità: ci si può chiedere quali siano stati gli aumenti di prezzo da ieri ad oggi. In altre parole: possiamo determinare il valore di P/P' e di p/p'?
La risposta è sì, ma soltanto in funzione di x, ovverosia del rapporto P/p.

La prima delle relazioni (1), cioè $3P+p=5P'$, unita a $P=xp$, ci consente di ricavare, con un paio di passaggi:

$$\frac{P}{P'}=\frac{5x}{3x+1}$$

Invece dalla (3), unita a $P=xp$, ricaviamo:

$$\frac{p}{p'}=\frac{5}{x+2}.$$

Dunque l'aumento di prezzo è stato diverso per i pesci grossi e per quelli piccoli. Infatti, per avere un aumento uguale… ovviamente avrebbe dovuto essere ancora $x=\varphi$ e, per questo valore, sarebbe:

$$\frac{p}{p'}=\frac{P}{P'}=\frac{5}{\varphi+2}\cong 1{,}382.$$

▫ Ma in pratica? Ricordiamo l'affermazione che oggi un pesce grosso costa *circa* 1,6 volte uno piccolo ed esaminiamo un caso concreto. Supponiamo, per esempio, che ieri i prezzi fossero i seguenti: $p'=10{,}00$ € e $P'=16{,}00$ € (con un rapporto, *esattamente*, di 1,6).

In questa ipotesi, con pochi calcoli si possono ricavare i prezzi di oggi:

$$P=22{,}00\text{ €} \qquad p=14{,}00\text{ €}.$$

Si può constatare che il rapporto risulta $P/p=11/7\cong 1{,}571$ (per l'appunto, *circa* 1,6 volte); si vede, però, anche quale sarebbero gli aumenti di prezzo: il 40% per i pesci piccoli e poco meno per quelli grossi – mica male!

Insomma, anche se Silvia ha sbagliato i conti, pare proprio che non avesse torto a lamentarsi per i nuovi prezzi!